



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^3 + \left(\frac{-12}{-3} \right)^3 + 10 \right) \cdot \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^2 + \left(\frac{-12}{-3} \right)^2 - 22 \right) \\ &= \left((-4)^3 + (+4)^3 + 10 \right) \cdot \left((-4)^2 + (+4)^2 - 22 \right) \\ &= (-4^3 + 4^3 + 10) \cdot (16 + 16 - 22) = 10 \cdot 10 = 100. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές (AB = ΑΓ) με $\hat{A} = 40^\circ$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επίσης τα τρίγωνα ABE και ABH είναι ισοσκελή με EA = EB και AB = AH.

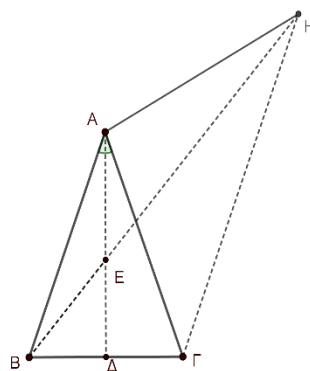
Να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{AHB} = 20^\circ$,

(β) $\hat{A\Gamma H} = 40^\circ$,

(γ) η BH είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma H}$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 40^\circ$ και $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 20^\circ$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές με $AB = AH$, θα ισχύει: $\hat{A}HB = \hat{B}_1 = 20^\circ$.

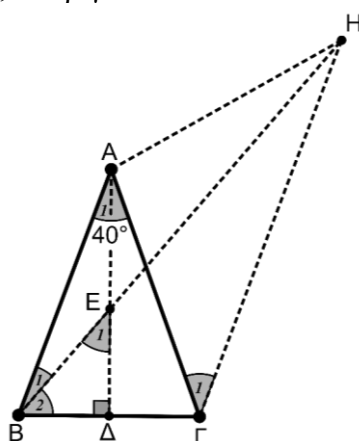
(β) Επειδή το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές με $\hat{A}HB = \hat{B}_1 = 20^\circ$ θα είναι

$$\hat{BAH} = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\hat{BAH} = \hat{BAG} + \hat{GAH} \Rightarrow 140^\circ = 40^\circ + \hat{GAH} \Rightarrow \hat{GAH} = 100^\circ.$$

Επειδή $AG = AB = AH$, το τρίγωνο GAH είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2 \cdot \hat{AGH} = 180^\circ - \hat{GAH} \Rightarrow \hat{AGH} = \frac{180^\circ - \hat{GAH}}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $\hat{AHG} = \hat{AGH} = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $\hat{AHB} = 20^\circ$, Επομένως θα έχουμε

$$\hat{BHG} = \hat{AHG} - \hat{AHB} = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $\hat{BHG} = \hat{AHB} = 20^\circ$, οπότε η BH είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{AHG}$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματά του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματά του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματά του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{x}{2} + 50 \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 50 \Leftrightarrow x = 100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y = \frac{y}{2} + 40 + 100 \Leftrightarrow y - \frac{y}{2} = 100 + 40 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 140 \Leftrightarrow y = 280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z = \frac{z}{2} + 30 + 280 \Leftrightarrow z - \frac{z}{2} = 280 + 30 \Leftrightarrow \frac{z}{2} = 310 \Leftrightarrow z = 620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α, β και γ , με $\alpha < \beta < \gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β, γ , να βρείτε τις δυνατές τιμές των α, β, γ .

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α, β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$$\alpha = 72\kappa, \beta = 72\lambda, \gamma = 72\mu \quad (\text{όπου } \kappa, \lambda, \mu \text{ διαφορετικοί ανά δύο με } \kappa < \lambda < \mu).$$

Επειδή πρέπει οι αριθμοί α, β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008 = 14 \cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa} = \frac{72 \cdot 14}{72\kappa} = \frac{14}{\kappa}, \quad \frac{1008}{72\lambda} = \frac{72 \cdot 14}{72\lambda} = \frac{14}{\lambda}, \quad \frac{1008}{72\mu} = \frac{72 \cdot 14}{72\mu} = \frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ, λ, μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.

Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa < \lambda < \mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ, λ, μ) είναι:

$$(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7) \text{ ή } (\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14) \text{ ή } (\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14) \text{ ή } (\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14).$$

Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = \text{MKΔ}(\beta, \gamma) = 72$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 144 = \text{MKΔ}(\beta, \gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 504, \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{MKΔ}(\beta, \gamma)$.

- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$, τότε $\alpha = 144$, $\beta = 504$, $\gamma = 1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{MK}\Delta(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{MK}\Delta(\beta, \gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha = 72$, $\beta = 144$, $\gamma = 504$.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200 \\ &= \left(\left(\frac{-20}{4} \right)^{11} + \left(\frac{-25}{-5} \right)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^{20} - \left(\frac{4}{1} \right)^{20} \right) + 200 \\ &= \left((-5)^{11} + (+5)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left((-4)^{20} - 4^{20} \right) + 200 \\ &= (-5^{11} + 5^{11}) \cdot (-2018)^2 + (4^{20} - 4^{20}) + 200 = 0 \cdot (-2018)^2 + 0 + 200 = 200. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος n αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Λύση

Ονομάζουμε A το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, B του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι $A = 120$ γραμμάρια και

$$\frac{A+B}{2} = 115 \Leftrightarrow A+B = 230 \Leftrightarrow 120+B = 230 \Leftrightarrow B = 230-120 = 110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι: