



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2}.$$

Λύση

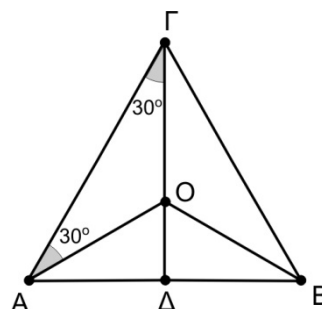
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2} \\ &= \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^3 + \left(\frac{-15}{-3} \right)^3 \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - (-4)^2 \\ &= \left((-5)^3 + (+5)^3 \right) \cdot (-2)^3 + (-4)^2 - (-4)^2 \\ &= (-5^3 + 5^3) \cdot (-2)^3 + 16 - 16 = 0 \cdot (-2)^3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά AB. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση AB στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη AB και το σημείο Δ είναι το μέσο της AB.

(β) Αν $\widehat{O\hat{A}G} = \widehat{O\hat{G}A} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$.



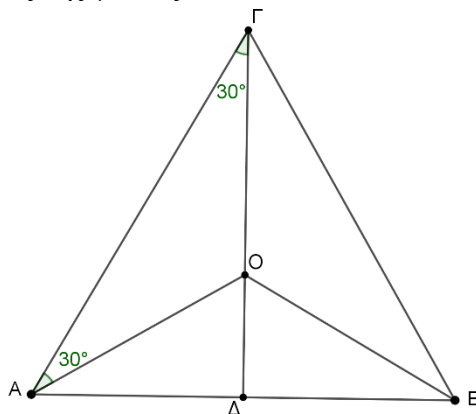
Λύση

(α) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση τη AB, έχουμε ότι $GA = GB$ και $OA = OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του AB, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του AB. Επομένως τέμνει κάθετα την AB στο μέσο της, δηλαδή $AD = DB$.

(β) Το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\hat{A}\Gamma\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 60^\circ$. Επομένως

$$\hat{\Delta}\hat{A}\hat{O} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} - \hat{O}\hat{A}\hat{\Gamma} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \hat{O}\hat{A}\hat{\Gamma},$$

οπότε η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού

μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ,}$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος A διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς A .

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο A έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο A έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός N είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^{2v+1}}{2^{2v+1}} + \frac{(-15)^{2v-1}}{(-3)^{2v-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2v}}{2^{2v}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2v} + 2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-10)^{2v+1}}{2^{2v+1}} + \frac{(-15)^{2v-1}}{(-3)^{2v-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2v}}{2^{2v}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2v} + 2018 \\ &= \left(\left(-\frac{10}{2} \right)^{2v+1} + \left(+\frac{15}{3} \right)^{2v-1} \right) \cdot (-2017)^2 + \left(-\frac{8}{2} \right)^{2v} - \left(-\frac{4}{1} \right)^{2v} + 2018 \\ &= \left((-5)^{2v+1} + (+5)^{2v-1} \right) \cdot (-2017)^2 + (-4)^{2v} - (-4)^{2v} + 2018 \\ &= \left(-5^{2v+1} + 5^{2v-1} \right) \cdot (-2017)^2 + 2018 = -5^{2v-1} (5^2 - 1) 2017^2 + 2018 \\ &= -24 \cdot 5^{2v-1} \cdot 2017^2 + 2018 = -24 \cdot 5^{2v-1} \cdot 4068289 + 2018. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε Α, Β το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.