



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

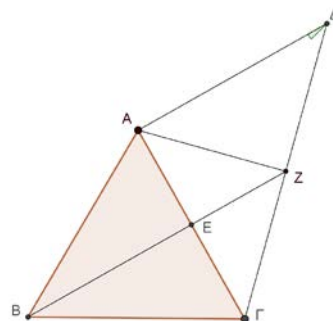
$$\begin{aligned} A &= \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{-20}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{-5}\right)^3 + \left(\frac{-8}{2}\right)^3 - \left(\frac{9}{-3}\right)^3 \\ &= (-4)^2 + (-3)^3 + (-4)^3 - (-3)^3 = (-4)^2 + (-4)^3 = 16 - 64 = -48. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = α κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

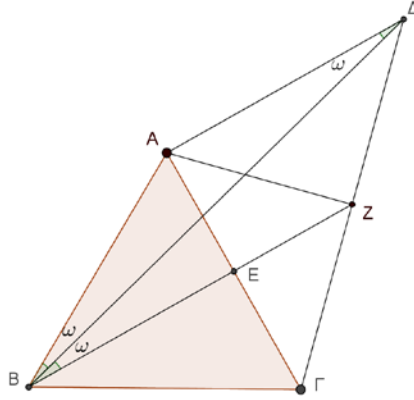
(α) Να αποδείξετε ότι $ZA = Z\Gamma$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}\Delta B$.



Λύση

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείο Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $ZA = Z\Gamma$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $AD = \alpha$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με

$$\hat{A}B = \hat{A}\Delta \quad (1)$$

Η διάμεσος BE του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά AG , όπως είναι κάθετη και η AD , από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel AD$, οπότε

$$\hat{A}B = \hat{\Delta}BE \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}BE. \quad (3)$$

Άρα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}BE$, οπότε θα έχουμε

$$\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}BE = \frac{\hat{A}BE}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η BE είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $\hat{A}BE = \frac{\hat{AB}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $\hat{A}B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} = 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \beta = 540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100} \cdot \beta = 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha \cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας A Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: 88, 89, 98, 99. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός A είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί 8888, 9988 έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι 8988, 9888, οπότε η ελάχιστη τιμή του A είναι 8988.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$ και $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2 \beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

.

Λύση

$$\text{Έχουμε ότι } \alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^v : 2^{2v-1} = 4^v : 2^{2v-1} = 2^{2v} : 2^{2v-1} = 2^{2v-(2v-1)} = 2.$$