



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}, \quad B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11} = 24 : 6 + 25 - 2 \cdot 8 + 8 : 4 + \frac{9}{11} = 4 + 25 - 16 + 2 + \frac{9}{11} \\ &= 15 + \frac{9}{11} = 15 \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = (32 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = 144 : 9 - 1 + \frac{5}{7} = 16 - 1 + \frac{5}{7} \\ &= 15 + \frac{5}{7} = 15 \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε: } A - B = 15 \frac{9}{11} - 15 \frac{5}{7} = 15 + \frac{9}{11} - 15 - \frac{5}{7} = \frac{9}{11} - \frac{5}{7} = \frac{63 - 55}{77} = \frac{8}{77} > 0,$$

οπότε θα είναι $A > B$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, (ii) το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(\alpha + \beta) = 2(6 + 4) = 20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $E = \alpha\beta = 6 \cdot 4 = 24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6 + 6 \cdot \frac{20}{100} = 6 + 1,2 = 7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4 - 4 \cdot \frac{5}{100} = 4 - 0,2 = 3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$$\Pi' = 2(7,2 + 3,8) = 2 \cdot 11 = 22 \text{ μέτρα, } \text{οπότε η αύξησή της είναι}$$

$$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2 \text{ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι}$$

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει

$$E' = 7,2 \cdot 3,8 = 27,36 \text{ τετρ. μέτρα, } \text{οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι}$$

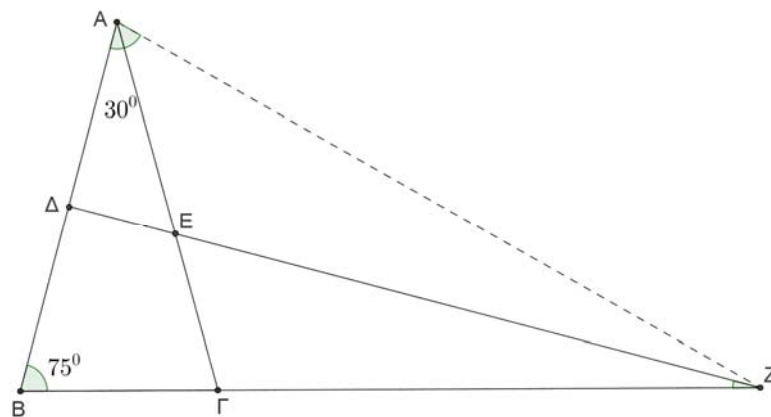
$$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36 \text{ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι}$$

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\hat{\Delta}$ και $\Gamma\hat{A}\hat{Z}$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές $AB = A\Gamma$ θα έχει τις

$$\text{απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = \frac{180^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Επειδή το Z είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς AB θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία A και B , δηλαδή είναι $ZA = ZB$. Επομένως το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $\hat{B}\hat{A}\hat{Z} = \hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Τότε θα είναι $\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη $Z\Delta$ της πλευράς AB του τριγώνου AZB είναι και διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}\hat{Z}\hat{B}$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\hat{\Delta} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Delta$ με $B\hat{\Delta}\hat{Z} = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}\hat{Z}$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}\hat{Z} = \hat{B}\hat{A}\hat{Z} - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $EKP(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $EKP(3,10,11)=330$. Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

Λύση

Έχουμε $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1} = \frac{16}{81}$ και

$$\begin{aligned} A &= \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3} + \frac{1}{33} + \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{\frac{65}{16}}{\frac{16}{16}} + \frac{1}{33} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{65}{33} + \frac{1}{33} + \frac{9}{27} = \frac{66}{33} + \frac{9}{27} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$