



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8 \\ &= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16 : 8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200 - x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$

ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο

ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200 \cdot \frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} &= 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800 \\ &\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80. \end{aligned}$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200 - 80 = 120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

$$(\text{Παρανομαστής}) - (\text{Αριθμητής}) = 1012.$$

Έτσι γράφουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1003}{2015} &= 1 - \frac{1012}{2015}, \quad \frac{1007}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019}, \quad \frac{1009}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021}, \quad \frac{997}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009} \\ \frac{1011}{2023} &= 1 - \frac{1012}{2023}, \quad \frac{999}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011}, \quad \frac{1001}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013}, \quad \frac{1005}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009} > \frac{1012}{2011} > \frac{1012}{2013} > \frac{1012}{2015} > \frac{1012}{2017} > \frac{1012}{2019} > \frac{1012}{2021} > \frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{1012}{2009} < 1 - \frac{1012}{2011} < 1 - \frac{1012}{2013} < 1 - \frac{1012}{2015} < 1 - \frac{1012}{2017} < 1 - \frac{1012}{2019} < 1 - \frac{1012}{2021} < 1 - \frac{1012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

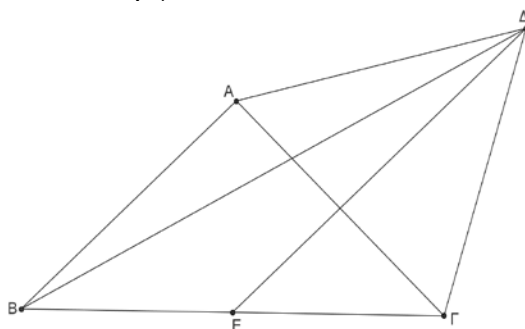
ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

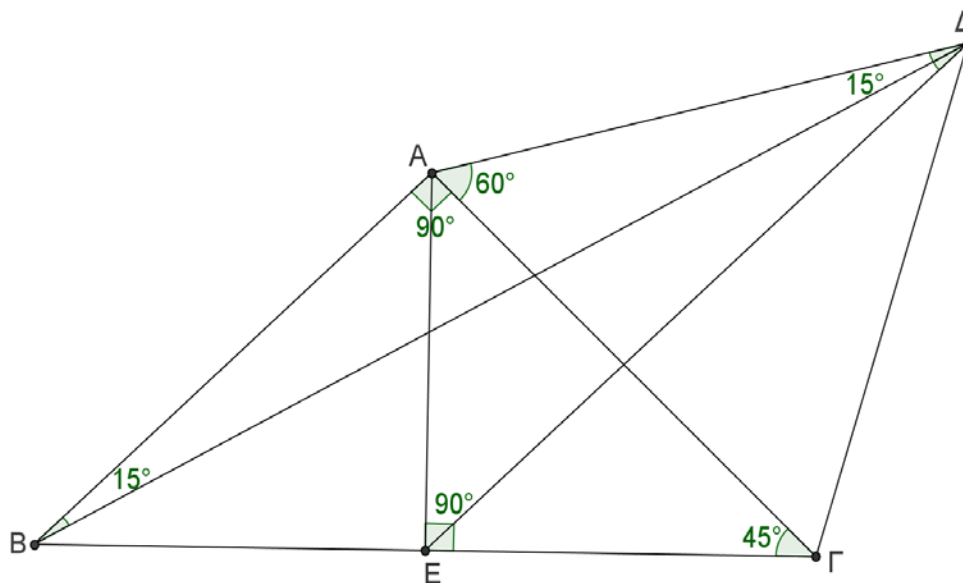
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{A}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του AE είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο στο E με μία γωνία του 45° . Επομένως θα έχει $\hat{EAG} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = EG$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta \Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα άκρα A και Γ του ευθύγραμμου τμήματος AG , οπότε η ευθεία DE είναι η μεσοκάθετη του AG .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{\Delta\Gamma} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma AB} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή $AB\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\hat{A\Delta B} = \hat{B\Delta A} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες AB και DE είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία AG , που τις τέμνει η ευθεία BD , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\hat{B\Delta E} = \hat{A\Delta A} = 15^\circ$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$