



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right)$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4}{14} + \frac{14}{14} - \frac{1}{14} \right) \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{14}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{17}{14} \cdot \frac{2}{17} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \left(\frac{9}{6} + \frac{28}{6} - \frac{6}{6} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{31}{6} - \frac{31}{6} = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu = 2$ ή $\nu = 5$.

- Για $\nu = 2$, έχουμε: $B = \frac{2}{2 - \frac{1}{5}} : \frac{2 - \frac{2}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{9}{5}} : \frac{2 - 1}{9} = \frac{10}{9} : \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \cdot 9 = 10.$
- Για $\nu = 5$, έχουμε: $B = \frac{2}{5 - \frac{1}{5}} : \frac{5 - \frac{5}{2}}{9} = \frac{2}{\frac{24}{5}} : \frac{\frac{5}{2}}{9} = \frac{10}{24} : \frac{5}{18} = \frac{10}{24} \cdot \frac{18}{5} = \frac{180}{120} = \frac{3}{2}.$

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{9} = \frac{\gamma}{11} = \omega$, οπότε θα είναι $\alpha = 3\omega$, $\beta = 9\omega$ και $\gamma = 11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma - \alpha = 56 \Leftrightarrow 11\omega - 3\omega = 56 \Leftrightarrow 8\omega = 56 \Leftrightarrow \omega = 7.$$

Άρα είναι: $\alpha = 3 \cdot 7 = 21$, $\beta = 9 \cdot 7 = 63$ και $\gamma = 11 \cdot 7 = 77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔH έτσι ώστε $A\Delta = \Delta H$. Από το σημείο H φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z .

1. Να αποδείξετε ότι: $\hat{A}\Delta E = 90^\circ$.

2. Να βρείτε τη γωνία $E\Delta Z$, αν γνωρίζετε ότι: $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$.

Λύση

1. Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας

$$\hat{A}, \text{ θα ισχύει: } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Από την παραλληλία των AB και ZH , συμπεραίνουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{H}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{A}_2 = \hat{H}$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta H$ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης AH του ισοσκελούς τριγώνου $A\Delta H$, οπότε η διάμεσος $E\Delta$ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Delta H$, δηλαδή θα είναι $E\Delta \perp AH$ και $\hat{A}\Delta E = 90^\circ$.

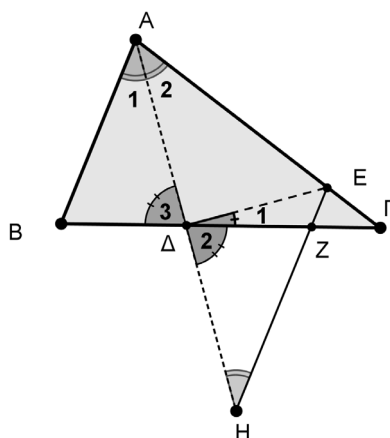
2. Επειδή $\hat{A}\Delta E = \hat{A}\Delta H = 90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_3.$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας

$\hat{A}\Delta\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3 = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{E}_1 = 90^\circ - \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ.$$



Σχήμα 1