ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.

Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

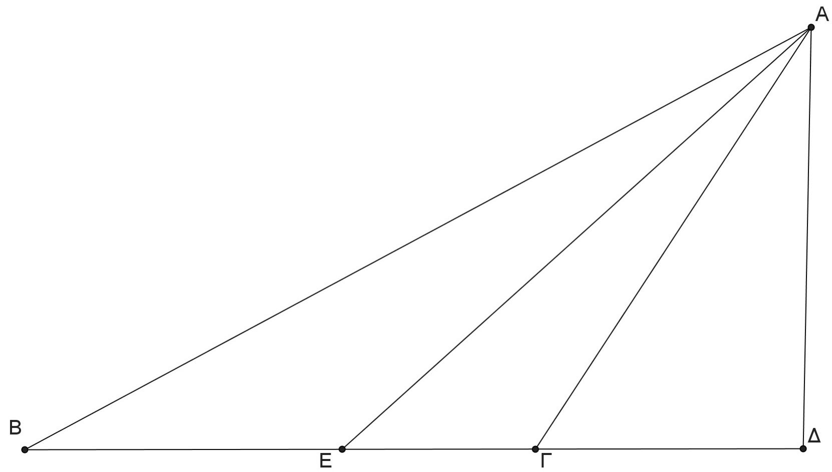
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot(-1)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot(-1)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

Λύση